Prof. Dr. Horst Fischer // Dr. Kim Heidegger WS 2017/2018

Grundlagen der Physik mit Experimenten
für Studierende der Medizin, Zahnmedizin und Pharmazie

Übungsaufgaben für die Übungsstunde in der Woche vom 27.11.17 // Woche 48

5 - Wärmelehre & Fehlerrechnung

Übungsaufgaben zum Lösen daheim:

SS 2004 #15
SS 2004 #20
SS 2005 #23
SS 2005 #27
WS 2008/2009 #21
WS 2009/2010 #27
SS 2005N #26
WS 2003/2004 #17
WS 2007/2008 #23

WS 2003/2004 #19
SS 2005N #1
SS 2006N #28
WS 2006/2007 #3

NÜTZLICHE FORMELN UND GRUNDLAGEN

Wärmekapazität:
Wärme ist eine physikalische Größe ähnlich der physikalischen Arbeit und wird mit Q in Formeln bezeichnet. Führt man einem Körper der Masse m eine Wärmemenge Q hinzu, so erhöht sich dessen Temperatur um ΔT. Wie viel dies genau ist, hängt ab von der spezifischen Wärmekapazität c.

$$Q = c \cdot m \cdot \Delta T \tag{1}$$

Die spezifische Wärmekapazität von Wasser ist in den Formeln angegeben, sie beträgt $c_{Wasser} = 4,2\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{g\,K}}$. Man benötigt also anschaulich 4,2 Joule, um ein Gramm Wasser um ein Kelvin, bzw. Celsius zu erwärmen.

Schmelzwärme:
Manchmal steckt man Wärme in ein System, und die Temperatur erhöht sich gar nicht. Das ist immer der

Fall bei Phasenübergängen. Die zugefügte Energie wird z.B. genutzt, um Eis zu schmelzen oder Wasser in Dampf zu verwandeln. In diesem Zusammenhang ist der Begriff der Schmelzwärme χ zu erwähnen:

$$Q = \chi \cdot m \qquad \text{mit} \qquad \chi = 333\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{g}} \qquad \text{für Wasser.} \tag{2}$$

Um ein Gramm Eis bei 0 °C zu schmelzen, benötigt man also 333 J. Danach hat es allerdings immer noch 0 °C, es ist lediglich flüssig geworden.

Wärmeleistung:
Da Wärme analog zur Arbeit behandelt werden kann, kann man auch Wärmeleistung definieren als

$$P = \frac{Q}{t}. \tag{3}$$

Anschaulich ist dies eine zeitliche Zu- oder Abnahme von Wärme, ein Wärmefluss.

Mischformeln:
Mischt man zwei verschiedene Stoffe der Massen m_1 und m_2, mit verschiedener Temperatur T_1 und T_2 sowie verschiedener spezifischer Wärmekapazität c_1 und c_2, erhält man eine Mischtemperatur. Diese ist gegeben durch

$$T_M = \frac{c_1\,m_1\,T_1 + c_2\,m_2\,T_2}{m_1\,c_1 + m_2\,c_2}. \tag{4}$$

Sind die Wärmekapazitäten c_1 und c_2 gleich, wie z.B. wenn man Wasser verschiedener Temperaturen zusammengießt, vereinfacht sich diese Formel zu

$$T_M = \frac{m_1\,T_1 + m_2\,T_2}{m_1 + m_2}. \tag{5}$$

Erinnerung... andere Formen der Energie:
Oft wird in den Aufgaben die Umwandlung von einer anderen Energieform in Wärme thematisiert. Dies kann zum Beispiel kinetische Energie eines Körpers

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\,m\,v^2, \tag{6}$$

oder eine potentielle Energie sein:

$$E_{pot} = m\,g\,h. \tag{7}$$

Es kann aber auch einmal elektrische Leistung in Wärme gewandelt werden:

$$P = U\,I = R\,I^2 = \frac{U^2}{R}. \tag{8}$$

Systematischer Fehler:
Der systematische Fehler einer Messung ist unabhängig davon, wie oft man misst und wird allein durch den Messaufbau bzw. die Messmethode hervorgerufen (z.B. man misst mit einem schlecht gefertigten Zollstock, der immer etwas zu kurz misst).

Statistischer Fehler:
Der statistische Fehler nimmt ab mit der Zahl der Messungen. Bei Zählexperimenten findet man:

$$s_\mu = \frac{s}{\sqrt{n}}. \tag{9}$$

Der Fehler einer Einzelmessung s wird durch die hohe Zahl der Versuche n deutlich kleiner, und man erhält den Fehler auf den Mittelwert, s_μ. $\sqrt{n} = \sigma$ heisst auch Standardabweichung.

Zählrate:
Bei vielen Aufgaben soll eine Zählrate samt ihrem Fehler bestimmt werden. Gemeint ist damit:

$$\text{Zählrate} = \frac{\text{Ereignisse}}{\text{Zählzeit}} \pm \frac{\sqrt{\text{Ereignisse}}}{\text{Zählzeit}}. \tag{10}$$

Relativer Fehler:
Der relative Fehler einer Größe A ist definiert als

$$\sigma_{rel} = \frac{\sigma_{abs}}{A} = \frac{\sigma_A\,[\text{Einheit}]}{A\,[\text{Einheit}]} \qquad \text{Die Einheit kürzt sich weg!} \tag{11}$$

Relative Fehler sind immer einheitenlos, da sich die Einheit in jedem Fall wegkürzt. Sie werden daher oft in % angegeben!

Beispielaufgabe 1: WS 2003/2004 #24

In dieser Aufgabe werden zwei verschiedene Stoffe mit verschiedenen Wärmekapazitäten in thermischen Kontakt gebracht. Die "Mischtemperatur" ist hier gefragt. Masse m, Temperatur T sowie Wärmekapazität c ist für beide Stoffe, Wasser und Kupfer, gegeben. Man kann also einfach die Formel für die Mischtemperatur T_M verwenden:

$$T_M = \frac{c_W\, m_W\, T_W + c_K\, m_K\, T_K}{m_W\, c_W + m_K\, c_K} = \frac{4,2\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \cdot 1\,\text{kg} \cdot 298,15\,\text{K} + 0,38\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \cdot 0,3\,\text{kg} \cdot 373,15\,\text{K}}{1\,\text{kg} \cdot 4,2\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} + 0,3\,\text{kg} \cdot 0,38\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}} \tag{12}$$

$$T_M = 300\,\text{K} = 27\,^\circ\text{C} \tag{13}$$

$\Rightarrow$ **Antwort E** "27 °C" ist somit korrekt.

Beispielaufgabe 2: SS 2005/2006 #8

Der Würfel Eis mit seiner Kantenlänge von 2 cm at ein Volumen von $V = (2^3)\,\text{cm}^3$, was bei Eis näherungsweise einem Gewicht von $m = 8\,\text{g}$ entspricht.
Zunächst berechnen wir die Schmelzwärme des Eises:

$$Q = \chi \cdot m = 333\,\frac{\text{J}}{\text{g}} \cdot 8\,\text{g} = 2.664\,\text{J}. \tag{14}$$

Diese Wärme ist nötig, um das Eis zu schmelzen und wird dem Wasser entzogen. Dessen Temperatur wird dadurch abgesenkt:

$$Q = c \cdot m \cdot \Delta T \qquad \Leftrightarrow \qquad 2.664\,\text{J} = 4,2\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \cdot 0,2\,\text{kg} \cdot \Delta T \tag{15}$$

$$\Delta T = 3,17\,\text{kg} \qquad \Rightarrow \qquad T = 16,83\,^\circ\text{C} \tag{16}$$

Nun sind wir noch nicht ganz fertig. Wir haben jetzt 200 ml abgekühlten Apfelsaft und 8 ml Wasser mit 0 °C darin. Das wird natürlich nicht so bleiben, sondern sich mischen. Wir mischen also unter der Annahme, dass Apfelsaft und Wasser die gleiche Wärmekapazität besitzen:

$$T_M = \frac{m_A T_A + m_W T_W}{m_A + m_W} = \frac{0{,}2\,\mathrm{kg} \cdot 289{,}98\,\mathrm{K} + 0{,}008\,\mathrm{kg} \cdot 273{,}15\,\mathrm{K}}{0{,}2\,\mathrm{kg} + 0{,}008\,\mathrm{kg}} = 289{,}33\,\mathrm{K} = 16{,}18\,^\circ\mathrm{C} \quad (17)$$

⇒ **Antwort A** "16, 2 °C" ist somit korrekt.

Beispielaufgabe 3: WS 2004/2005 #7

Hier handelt es sich um ein Zählexperiment. In 100 s wurden zwei verschiedene Zählwerte ermittelt: $x_1 = 1148$ und $x_2 = 2319$. Was sofort ins Auge fällt, ist der große Unterschied, da liegt mehr als ein Faktor 2 dazwischen! Insofern sieht man eigentlich direkt, dass hier irgendetwas "nicht stimmt". Antwort A drängt sich also schon regelrecht auf ;-)
Berechnen wir dennoch einmal die beiden Raten, sowie die Standardabweichung der Raten $\sigma = \frac{\sqrt{n}}{100\,\mathrm{s}}$:

$$\mathrm{Rate}_1 = \frac{1148}{100\,\mathrm{s}} \pm \frac{\sqrt{1148}}{100\,\mathrm{s}} = (11{,}48 \pm 0{,}34)\,\frac{1}{\mathrm{s}} \quad (18)$$

$$\mathrm{Rate}_2 = \frac{2319}{100\,\mathrm{s}} \pm \frac{\sqrt{2319}}{100\,\mathrm{s}} = (23{,}19 \pm 0{,}48)\,\frac{1}{\mathrm{s}} \quad (19)$$

Betrachten wir die Ergebnisse besser getrennt und versuchen nicht, einen Mittelwert zu bilden. Sie liegen wirklich weit voneinander weg! Selbst die größere der beiden Standardabweichungen ist nur $0{,}48\,\frac{1}{\mathrm{s}}$, das ist nicht einmal in der Nähe der Differenz der beiden Messungen

$$23{,}19\,\frac{1}{\mathrm{s}} - 11{,}48\,\frac{1}{\mathrm{s}} = 11{,}71\,\frac{1}{\mathrm{s}} \quad (20)$$

Woran es letztendlich gelegen hat, kann man so nicht sagen. Es ist nichts auszuschließen, ausser dass die beiden Messungen nur 2 Standardabweichungen auseinander liegen.
⇒ **Antwort A** "Die beiden Messungen liegen nur 2 Standardabweichungen auseinander." ist somit falsch bzw. die korrekte Antwort.