Grundlagen der Physik mit Experimenten
für Studierende der Medizin, Zahnmedizin und Pharmazie

Übungsaufgaben für die Übungsstunde in der Woche vom 20.11.17 // Woche 47

4 - Auftrieb & Viskosität

Übungsaufgaben zum Lösen daheim:

SS 2004N #19
WS 2004/2005 #8
SS 2005N #28
WS 2005/2006 #13
SS 2006 #20
SS 2005 #9
WS 2006/2007 #10
SS 2011 #4

SS 2004N #14
WS 2004/2005 #30
SS 2005N #13
SS 2010N #19

NÜTZLICHE FORMELN UND GRUNDLAGEN

Auftrieb:
Der Auftrieb als Phänomen ist jedem anschaulich klar: In Wasser eingetauchte Körper schwimmen oder treiben auf, wenn ihre Dichte kleiner als die von Wasser ist. Bei schwereren, bzw. eigentlich dichteren Gegenständen verhält es sich anders: Sie gehen unter. Das gilt für alle Körper und alle Flüssigkeiten, es kommt lediglich auf die Differenz ihrer Dichten $(\rho_K - \rho_{Fl})$ an. In der Formel findet sich dies wieder in der gesamten, resultierenden Kraft auf einen Körper K:

$$F_{tot} = F_G - F_A = (\rho_K - \rho_{Fl})\, V_K\, g \tag{1}$$

Die Gewichtskraft

$$F_G = m\, g = \rho_K\, V_K\, g \tag{2}$$

ist uns schon an anderer Stelle begegnet, wieder ist $g = 9,81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ die Erdbeschleunigung.

Die Auftriebskraft alleine ist somit

$$F_A = \rho_{Fl} V_K g \tag{3}$$

und entspricht der Gewichtskraft des Körpers, hätte er die Dichte der Flüssigkeit. "Ein Körper im Wasser wiegt das, was er verdrängt", hat man dazu einmal in der Schule gelernt.

Teilweise eingetauchte Körper:
Schwimmt ein Körper an der Flüssigkeitsoberfläche, so verdrängt er nur Teile seines Volumens, beispielsweise 80%. Dann trägt eben auch nur dieser Anteil am Auftrieb bei, die Gewichtskraft hingegen wirkt immer noch vollständig:

$$F_{tot} = F_G - 0,8 \cdot F_A = (\rho_K - 0,8 \cdot \rho_{Fl}) V_K g \tag{4}$$

Viskose Strömungen:
Durchströmt eine Flüssigkeit ein Rohr oder eine andere Leitung (meist in den Aufgaben mit rundem Querschnitt), so bietet diese einen Widerstand. Die Flüssigkeit strömt insbesondere bei dünnen Leitungen, z.B. Kapillaren, Adern oder Kanülen nur vergleichsweise langsam. Wie viel Volumen V der Flüssigkeit pro Zeiteinheit t durch die enge Leitung gelangt, hängt ab von einigen Faktoren:

- Druck p der Flüssigkeit: Wird die Flüssigkeit mit einem hohen Druck durch die dünne Leitung gepresst, erhöht dies die Strömungsgeschwindigkeit.
- Radius r bzw. Querschnittsfläche A der Leitung: Durch eine extrem dünne Leitung geht -gefühlt- fast nichts durch. Die Abhängigkeit vom Querschnitt ist sehr hoch - sie geht mit A^2 bzw. r^4!
- Länge der Leitung l: Kurze Engpässe verursachen weniger Behinderung des Flusses als sehr lange dünne Leitungen.
- Viskosität η: Honig durch eine Kanüle zu drücken wird definitiv schwerer sein, als wenn man dies mit reinem Alkohol versucht.

Für das Vorliegen einer viskosen Strömung müssen einige Faktoren erfüllt sein. Es darf z.B. keine Wirbel geben, daher muss die Geschwindigkeit begrenzt sein.
Zur Behandlung von viskosen Strömungen gibt es das Gesetz von Hagen-Poiseuille. Es beschreibt den Volumenfluss I in Abhängigkeit der oben genannten Faktoren:

$$I = \frac{V}{t} = \frac{A^2 \,\Delta p}{8\pi \,\eta \,l} = \frac{\pi \,r^4 \,\Delta p}{8 \,\eta \,l}. \tag{5}$$

Die letztere Form erhält man, wenn man eine kreisrunde Querschnittsfläche $A = \pi \, r^2$ annimmt und dies einsetzt.

Beispielaufgabe 1: WS 2003/2004 #6

Gefragt wird nach der Dichte ρ_K eines in zwei unterschiedlichen Flüssigkeiten untergetauchten Körpers. Für beide Zustände (in Wasser: Zustand 1, in Hexachlorbenzol: Zustand 2) lässt sich die resultierende Kraft auf den Körper $F_{tot,W}$ bzw. $F_{tot,Hexa}$ aufstellen:

$$F_{tot,W} = (\rho_K - \rho_W) V_K g \tag{6}$$

$$F_{tot,Hexa} = (\rho_K - \rho_{Hexa})\, V_K\, g \tag{7}$$

Nun wissen wir aus der Aufgabenstellung, dass der Körper in Wasser 25% schwerer ist als in Hexachlorbenzol. Als Formel schreibt sich das:

$$F_{tot,1} = 1,25 \cdot F_{tot,2} \quad \Leftrightarrow \quad (\rho_K - \rho_W)\, V_K\, g = 1,25 \cdot (\rho_K - \rho_{Hexa})\, V_K\, g \tag{8}$$

Nun können wir jede Menge kürzen, z.B. g und das Volumen des Körpers V_K. Da wir $\rho_W = 1\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ kennen und $\rho_{Hexa} = 2,04\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ in der Aufgabe angegeben ist, kann man nach ρ_K auflösen:

$$\rho_K - \rho_W = 1,25 \cdot (\rho_K - \rho_{Hexa}) \quad \Leftrightarrow \quad \rho_K = 6,2\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \tag{9}$$

$\Rightarrow$ **Antwort B** "$6,2\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$" ist somit korrekt.

Beispielaufgabe 2: SS 2006N #17

Man darf sich den schwimmenden Körper in etwa so vorstellen, wie in Abbildung 1 gezeigt. Auch hier

Abbildung 1: Zeichnung zu Aufgabe SS 2006N #17

gibt es wieder die zwei Zustände: In Wasser und in der unbekannten Flüssigkeit.
Wenn ein Körper schwimmt, gleichen sich Gewichtskraft und Auftrieb gerade aus, dh es gilt

$$F_G = F_A \quad \Leftrightarrow \quad \rho_K\, V_K\, g = 0,5 \cdot \rho_W\, V_K\, g \qquad \text{Wasser} \tag{10}$$

$$F_G = F_A \quad \Leftrightarrow \quad \rho_K\, V_K\, g = 0,6 \cdot \rho_{uFl}\, V_K\, g \qquad \text{unbek. Fl.} \tag{11}$$

Die Gewichtskraft auf der linken Seite der Gleichung ist beide Male die gleiche, daher kann man gleichsetzen und kürzen:

$$0,5 \cdot \rho_W\, V_K\, g = 0,6 \cdot \rho_{uFl}\, V_K\, g \quad \Leftrightarrow \quad 0,5 \cdot \rho_W = 0,6 \cdot \rho_{uFl} \tag{12}$$

Löst man dies nach der Dichte der unbekannten Flüssigkeit ρ_{uFl} auf, sieht man leicht, welche Aussage hier zutrifft:

$$\rho_{uFl} = \rho_W \cdot \frac{0,5}{0,6} = \rho_W \cdot 0,83 = 0,83\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}. \tag{13}$$

$\Rightarrow$ **Antwort A** "Die Dichte der anderen Flüssigkeit ist geringer als die von Wasser." ist somit korrekt.

Beispielaufgabe 3: WS 2003/2004 #18

Nach unserer Faustformel wissen wir, dass eine Wasserhöhe von 10 m einem hydrostatischen Druck am Boden von etwa 1 bar $\approx$ 1000 mbar = 100.000 hPa entspricht. Dies ist hier für uns ausreichend genau.
Zunächst können wir berechnen, wie viel Wasser aus dem Volumen ausströmen soll nach Aufgabenstellung. Dies ist gegeben mit $h_{out} = 10\,\text{cm}$ Füllhöhe, was einem Volumen entspricht von

$$V_{out} = \pi \cdot r^2 \cdot h_{out} = \pi \cdot (0,05\,\text{m})^2 \cdot 0,1\,\text{m} = 0,000785\,\text{m}^3. \tag{14}$$

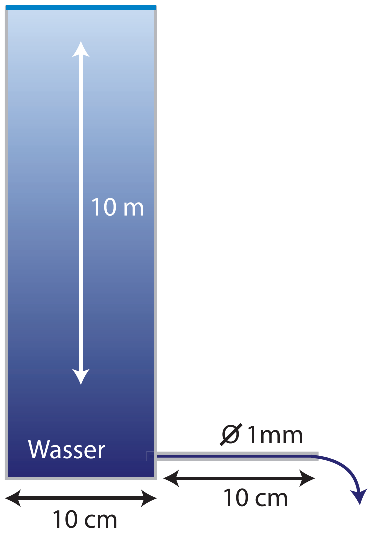

Abbildung 2: Zeichnung zu Aufgabe WS 2003/2004 #18

Der Volumenfluss, der ohne Einwirken von äußeren Kräften aus dem Gefäß herausfließt, kann berechnet werden mit Hagen-Poiseuille:

$$I = \frac{V}{t} = \frac{A^2 \,\Delta\, p}{8\pi\, \eta\, l} = \frac{\pi\, r^4\, \Delta\, p}{8\, \eta\, l} \tag{15}$$

$$I = \frac{\pi \,\cdot\, (0,05\,\mathrm{m})^4 \,\cdot\, 100.000\,\mathrm{hPa}}{8 \,\cdot\, 1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Pa} \,\cdot\, \mathrm{s} \,\cdot\, 0,1\,\mathrm{m}} = 2,45 \cdot 10^{-5} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}} \tag{16}$$

Die Zeit, die das Wasser zum Herauslaufen benötigt, errechnet sich jetzt durch einfaches Umstellen:

$$I = \frac{V}{t} \qquad \Leftrightarrow \qquad t = \frac{V}{I} = \frac{0,000785\,\mathrm{m}^3}{2,45 \cdot 10^{-5}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}} = 32\,\mathrm{s}. \tag{17}$$

⇒ **Antwort B** “nach etwa 33 s” ist somit korrekt (Ich gehe von einem Tippfehler in der Aufgabenstellung aus (33 statt 32), da die Rundungen, die wir gemacht haben, zu eher niedrigeren Zeiten führen).