Prof. Dr. Horst Fischer // Dr. Kim Heidegger WS 2017/2018

Grundlagen der Physik mit Experimenten
für Studierende der Medizin, Zahnmedizin und Pharmazie

Übungsaufgaben für die Übungsstunde in der Woche vom 06.11.17 // Woche 45

2 - Klassische Mechanik (Teil 2)

Übungsaufgaben zum Lösen daheim:

WS 2003/2004 #28
SS 2004N #10
WS 2004/2005 #24
SS 2005N #24
SS 2005 #12
WS 2005/2006 #16
WS 2006/2007 #9
WS 2006/2007 #17
WS 2008/2009 #12
SS 2004 #22
SS 2012 #19
SS 2008 #29
SS 2006 #22
WS 2011/2012 #10

NÜTZLICHE FORMELN UND GRUNDLAGEN

Rotationsbewegungen:
Rotationsbewegungen sind oft Kreis-Drehbewegungen und sind immer beschleunigt: Zum Mittelpunkt der Kreisbewegung hin. Es gibt für Rotationsbewegungen eine Hand voll Formeln, die euch nützlich sein könnten.

$$\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \tag{1}$$

Die Winkelgeschwindigkeit ω ist ein Maß für die Rotationsgeschwindigkeit. Man kann sie auch in Abhängigkeit der Frequenz f ausdrücken:

$$\omega = 2\pi f. \tag{2}$$

Hierbei ist f die Frequenz (z.B. in Umdrehungen pro Minute), und es gilt der Zusammenhang mit der

Periodendauer T (z.B. ein Jahr für eine Sonnenumrundung der Erde):

$$f = \frac{1}{T} \qquad \Leftrightarrow \qquad T = \frac{1}{f}. \tag{3}$$

Die Geschwindigkeit eines Objekts auf einer Kreisbahn wird jedoch mit v bezeichnet und berechnet sich bei Rotationen mit

$$v = \omega\, r = 2\,\pi\, f\, r. \tag{4}$$

Zentrifugalbeschleunigung:
Zentrifugalbeschleunigung, bzw. Zentripetalbeschleunigung als die Gegenkraft dazu, tritt auf, wenn man sich auf Kreisbahnen bewegt. Fährt man mit dem Auto eine Kurve, sorgt die Zentripetalbeschleunigung dafür, dass man auf dieser bleibt (Kraft zum Mittelpunkt hin, meist aufgeboten durch Reifen, Schnüre, Wände einer Wäschetrommel, ...).
Die Zentrifugalbeschleunigung ist das, was man während der Kurve spürt - nämlich, dass sich Masse ohne wirkende Kräfte immer nur geradeaus bewegt: Ohne Kontakt mit Sitz oder Wänden würde das Auto die Kurve fahren, man selbst würde jedoch geradeaus herausfliegen.
Diese Kräfte unterscheiden sich nur um die Richtung, also sind sie bis auf das Vorzeichen gleich:

$$F_Z = \frac{m\, v^2}{r} = \frac{m\, (\omega\, r)^2}{r} = m\, \omega^2\, r. \tag{5}$$

Gravitationskraft in Erdnähe:
Die Erdanziehung ist auf der Erdoberfläche näherungsweise konstant. Es spielt also keine Rolle, ob ihr vom Hochhaus oder vom Stuhl springt: Die Gravitationskraft zieht euch gleich stark Richtung Erdmittelpunkt: $F_g = m\, g$, $g = 9,81\, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.
Anders verhält sich die Sachlage, wenn ihr etwas weiter weg geht von der Erdoberfläche. “Etwas” meint in diesem Fall: mehrere Kilometer. Die Gravitationskraft F_g nimmt dort proportional ab mit einem Faktor, der vom Radius r zum Erdmittelpunkt abhängt:

$$F_g = \frac{m\, k}{r^2} \tag{6}$$

Natürlich muss die Gravitation auch noch von der Masse des betrachteten Körpers m abhängen. Der Faktor k ist hierbei eine Art Platzhalter für alles mögliche, was noch in der Formel drin steckt, was uns hier aber nicht interessiert. Das sind z.B. Naturkonstanten oder auch die Masse der Erde. Grundsätzlich sind die Aufgaben so gestellt, dass ihr diesen Faktor niemals explizit berechnen müsst, er kürzt sich immer irgendwo heraus... ;-).
Das Wichtige hierbei ist die Abhängigkeit der Gravitationskraft F_g von $\frac{1}{r^2}$.

Beispielaufgabe 1: WS 2005/2006 #5

Die Aufgabe fragt nach der Zeit, die die Erde bei der Umrundung der Sonne braucht, um ihren eigenen Durchmesser zurückzulegen, siehe Abbildung 1. Würde man die Geschwindigkeit v der Erde auf dieser Bahn kennen, ließe sich die Zeit für diese Strecke leicht mittels

$$v = \frac{s}{t} \qquad \Leftrightarrow \qquad t = \frac{s}{v} \tag{7}$$

berechnen. Dies stellt natürlich nur eine Näherung dar, da die Erde auf dem Teilstück der Umlaufbahn einen Bogen macht, wir jedoch mit gerader Strecke rechnen. Da die Umlaufbahn aber anders als in meiner Zeichnung sehr viel größer ist als der Durchmesser der Erde, macht das hier nichts aus.

Wie kommen wir jedoch an v? Die Bahngeschwindigkeit berechnet sich mittels

$$v = \omega r = 2\pi f r. \tag{8}$$

Die Frequenz f ist die einzige unbekannte Größe hier, denn $r = 150.000.000\,\mathrm{km} = 150.000.000.000\,\mathrm{m}$ ist gegeben. Nun ist aber auch

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1\ \text{Jahr}} = \frac{1}{365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60\mathrm{s}} \approx \frac{1}{\pi \cdot 10^7\,\mathrm{s}}. \tag{9}$$

Es ist zwar purer Zufall, aber man kann sich damit viel Rechenzeit ersparen: 1 Jahr $\approx \pi \cdot 10^7\,\mathrm{s}$! Damit ergibt sich für die Bahngeschwindigkeit

$$v = 29.871\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 30\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}, \tag{10}$$

und für die Zeit t ($s = 12.756,2\,\mathrm{km} = 12.756.200\,\mathrm{m}$):

$$t = \frac{12.756.200\,\mathrm{m}}{29.871\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 427\,\mathrm{s} = 7,12\,\mathrm{min}. \tag{11}$$

$\Rightarrow$ **Antwort B** "7,12 Minuten" ist somit korrekt.

Beispielaufgabe 2: WS 2003/2004 #26

Ein geostationärer Satellit befindet sich immer an derselben Stelle oberhalb der Erdoberfläche. Dies gilt z.B. für alle Fernsehsatelliten. Dementsprechend ist die Umlaufzeit $T = 1$ Tag $= 8,64 \cdot 10^4\,\mathrm{s}$. Da in der Aufgabe nur sehr vage von $\frac{1}{r^2}$-Abhängigkeit geredet wird, verwenden wir oben genannte Proportionalität für die Gravitation in Erdnähe:

$$F_g = \frac{m\,k}{r^2}. \tag{12}$$

Dabei ist der genaue Wert, sogar die Einheit von k tatsächlich als irrelevant anzusehen, wie wir gleich feststellen werden, da wir nur zwei Zustände vergleichen: Auf der Erdoberfläche und "im All". Auf der Erdoberfläche gilt:

$$F_g = \frac{m\,k}{r_E^2} \qquad \text{sowie} \qquad F_g = m\,g_E, \tag{13}$$

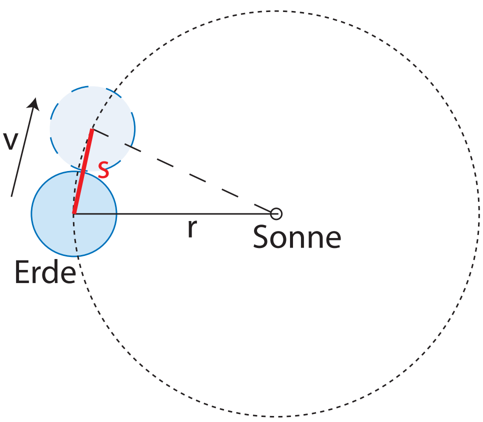

Abbildung 1: Zeichnung zu Aufgabe WS 2005/2006 #5

also zusammen:

$$\frac{m\,k}{r_E^2} = m\,g_E \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{k}{r_E^2} = g_E \qquad \Leftrightarrow \qquad k = g_E\,r_E^2. \tag{14}$$

In der Umlaufbahn des Satelliten, also "im All" gilt ganz genau analog:

$$\frac{m\,k}{r_A^2} = m\,g_A \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{k}{r_A^2} = g_A \qquad \Leftrightarrow \qquad k = g_A\,r_A^2. \tag{15}$$

Hierbei ist jetzt auch der zu berechnende Faktor g_A enthalten, der analog zu g_E die Anziehungskraft auf eine Masse m, jetzt jedoch in Satellitenhöhe r_A, beschreibt. Leider haben diese beiden Zustände wenig miteinander gemein, man kann nicht einfach g_A ausrechnen. Man weiß aber zusätzlich, dass $F_Z = F_g$ in der Umlaufbahn gelten muss, sonst wäre es keine stabile Umlaufbahn.

$$F_g = F_Z \qquad \Leftrightarrow \qquad m\,g_A = \frac{m\,v^2}{r_A}. \tag{16}$$

Mit

$$v^2 = (\omega\,r)^2 = (2\,\pi\,f\,r_A)^2 = 4\,\pi^2\,f^2\,r_A^2 \tag{17}$$

ergibt sich dann noch mit $k = g_{Erde}\,r_{Erde}^2$:

$$\frac{k}{r_A} = 4\,\pi^2\,f^2\,r_A^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{g_E\,r_E^2}{r_A} = 4\,\pi^2\,f^2\,r_A^2, \tag{18}$$

was man nach r_A auflösen kann ($f = \frac{1}{T}$):

$$r_A^3 = \frac{g_E\,r_E^2}{4\,\pi^2\,f^2} \qquad \Rightarrow \qquad r_A = 40.510.282\,\mathrm{m}. \tag{19}$$

Dann ist

$$g_A = \frac{k}{r_A^2}, = \frac{g_E\,r_E^2}{r_A^2} = 0,1996\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}. \tag{20}$$

$\Rightarrow$ **Antwort A** "*etwa* $0,2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$" ist somit korrekt.

Beispielaufgabe 3: SS 2011 #20

Im obersten Punkt des Loopings soll also Schwerelosigkeit herrschen, d.h. dass sich Zentrifugalkraft und Erdanziehungskraft gerade genau ausgleichen:

$$F_g = F_Z \qquad \Leftrightarrow \qquad m\,g = \frac{m\,v^2}{r}. \tag{21}$$

Hier lässt sich schon direkt die Masse m kürzen und nach v auflösen:

$$g\,r = v^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad v = \sqrt{g\,r} = \sqrt{9,81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 300\,\mathrm{m}} = 54,25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 195,3\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \tag{22}$$

$\Rightarrow$ **Antwort E** "200 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$" ist somit korrekt.