Prof. Dr. Horst Fischer // Dr. Kim Heidegger WS 2017/2018

Grundlagen der Physik mit Experimenten
für Studierende der Medizin, Zahnmedizin und Pharmazie

Übungsaufgaben für die Übungsstunde in der Woche vom 15.01.18 // Woche 3

10 - Radioaktivität

Übungsaufgaben zum Lösen daheim:

WS 2003/2004 #14
SS 2006 #25
SS 2004 #7
SS 2004 #14
SS 2004 #16
SS 2004 #17
SS 2006N #2
SS 2004N #21
SS 2004N #30
SS 2005 #2
SS 2005 #4
WS 2005/2006 #2

NÜTZLICHE FORMELN UND GRUNDLAGEN

Zerfälle:
Betrachtet man eine Menge m eines radioaktiven Stoffs, so befinden sich darin zum Zeitpunkt t eine bestimmte Menge Atome, die zerfallen könnten: $N(t)$. Möchte man nun wissen, wie viele dies nun tatsächlich tun, muss man die Aktivität $A(t)$ betrachten. Dies ist im Prinzip nichts anderes als die Zahl der Atome, die pro Zeiteinheit zerfallen, und damit nicht mehr zu $N(t)$ gehören: $N(t)$ nimmt ab um einen gewissen Anteil λ!

$$A(t) = \frac{-dN(t)}{dt} = \lambda \cdot N(t) \tag{1}$$

Nun kann man für $N(t)$ auch eine Formel angeben, sie lautet

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}. \tag{2}$$

Die Zahl der Atome, die noch zerfallen können, nehmen also exponentiell ab. Das heisst auch, dass nicht jederzeit gleich viel zerfallen, aber immer ein konstanter Anteil λ. Dieser Anteil λ ist gegeben durch

$$\lambda = \frac{ln\,2}{T_{1/2}}. \tag{3}$$

Hier taucht die Halbwertszeit des Stoffes auf: $T_{1/2}$. Es ist die Zeit, nach der die Hälfte der zum Zeitpunkt $t = 0$ vorhandenen Atome zerfallen ist:

$$0,5 = N_0 \cdot e^{-\lambda\, T_{1/2}}. \tag{4}$$

Mögliche Kernzerfälle:
Drei verschiedene Grundtypen von Kernzerfällen treten in der Natur auf:

- α-Zerfall: Ein schwerer Kern X zerfällt unter Aussendung von Helium^{2+}-Kernen (Alpha-Teilchen) zu einem anderen Element Y. Das ausgesendete Teilchen ist geladen.

$$^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{Y} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} + \Delta E \tag{5}$$

- β-Zerfall: Ein Kern X zerfällt unter Aussendung von Elektronen e^- oder Positronen e^+ zu einem anderen Element Y. Das ausgesendete Teilchen ist auch hier geladen.

$$^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}^{A}_{Z+1}\mathrm{Y} + e^- + \bar{\nu}_e \qquad \beta^-\text{-Zerfall} \tag{6}$$

$$^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}^{A}_{Z-1}\mathrm{Y} + e^+ + \nu_e \qquad \beta^+\text{-Zerfall} \tag{7}$$

  Beim β^+-Zerfall wird man das emittierte Positron nicht direkt finden können, da es nicht sehr weit kommt. Da es Antimaterie ist, rekombiniert es nach einer sehr geringen Zeit mit einem Elektron und zerstrahlt, d.h. man findet zwei γ-Quanten in entgegengesetzter Richtung mit je einer Energie, die der Masse eines Positrons oder Elektrons entspricht.

- γ-Zerfall: Ein Kern regt sich unter Aussendung eines γ-Quants innerlich ab, bleibt aber das gleiche Element X. γ-Quanten sind nichts anderes als sehr hochenergetische einzelne Lichtquanten.

Reichweite von Strahlung und geeignete Abschirmungen:

- α-Strahlung: Die Reichweite von α-Strahlung beträgt an Luft wenige Zentimeter. Es genügt ein Blatt Papier, um sie abzuschirmen.
- β-Strahlung: An Luft reicht β-Strahlung einige Meter. Ein Buch ist geeignet, um β-Strahlung zu schirmen.
- γ-Strahlung: Insbesondere hochenergetische γ-Strahlung lässt sich so gut wie gar nicht aufhalten. Sie ist mehrere zig Meter weiter noch gut nachweisbar und um in dem Papier-Vergleich zu bleiben: Eine Bibliothek wäre das, was man mindestens zur Abschirmung benötigt. Ein paar Tonnen Beton und Blei wären aber auch okay... ;-)

Strahlungsintensität:
Die Intensität I von Strahlung nimmt mit der Entfernung r von einer Quelle ab. Das ist auch ganz logisch, denn anschaulich werden die Teilchen, die in der Nähe der Quelle auf die Oberfläche eines Tennisballs z.B. passen, in 5 m Entfernung auf die Oberfläche eines Heißluftballons verteilt. Mathematisch drückt sich das wie folgt aus:

$$I \propto \frac{1}{r^2}. \tag{8}$$

Das ist auch der Grund, warum genügend Abstand zu einer radioaktiven Quelle der beste Schutz vor der Strahlung ist und einer dickeren Abschirmung allein fast immer überlegen ist.

Exponentielle Zuwächse:
Oft sind dies in den Aufgaben Teilungsprozesse oder Ansteckungen mit Krankheiten oder Ähnliches. Charakteristisch ist, dass sich die Zahl der betrachteten Objekte nach einer Zeit T verdoppelt. Man kann diese Prozesse im Grunde genau so behandeln wie Zerfälle, lediglich die Formel

$$N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}. \tag{9}$$

verliert ihr Minuszeichen im Exponenten: Die Zahl steigt exponentiell an! Es gilt immer noch für λ:

$$\lambda = \frac{ln\,2}{T}. \tag{10}$$

Beispielaufgabe 1: WS 2003/2004 #2

Gefragt wird hier nach der Menge des radioaktiven Isotops $^{1}37$Cs einer Quelle in Gramm, gegeben sind die Aktivität $A(t) = 20.000\,Bq$ und die Halbwertszeit $T_{1/2} = 30,2\,a$. Zunächst berechnet man aus $T_{1/2}$ die Größe λ.

$$\lambda = \frac{ln\,2}{T_{1/2}} = \frac{0,693}{30,2 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600} = 7,27 \cdot 10^{-10}\,\frac{1}{\mathrm{s}} \tag{11}$$

Da wir nun $A(t)$ und λ kennen, können wir die aktuelle Zahl der Cs-Atome berechnen:

$$A(t) = \frac{-dN(t)}{dt} = \lambda \cdot N(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad N(t) = \frac{20.000\,\frac{1}{\mathrm{s}}}{7,27 \cdot 10^{-10}\,\frac{1}{\mathrm{s}}} = 2,75 \cdot 10^{13} \tag{12}$$

Diese Zahl gibt uns die Cs-Atome in Stück an, gefragt ist aber deren Gewicht. Bekannt ist, dass 1 mol davon 137 g wiegen. Teilen wir nun $N(t)$ durch die Zahl Atome in einem Mol (N_A), bekommen wir die Zahl der Mole, n:

$$n = \frac{N(t)}{N_A} = 4,585 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{mol} \tag{13}$$

und damit können wir die Masse m errechnen:

$$m = M \cdot n = 137\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}} \cdot 4,585 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{mol} = 6,3 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{g} \tag{14}$$

$\Rightarrow$ **Antwort E** “etwa 6 ng” ist somit korrekt.

Beispielaufgabe 2: SS 2004N #17

Die molare Masse M von Wasser ist $M(\mathrm{H_2O}) = 18\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$. Das bedeutet, dass in einem Liter Wasser ($m = 1000\,\mathrm{g}$) eine Menge n Mole sind:

$$n = \frac{m}{M} = \frac{1000\,\mathrm{g}}{18\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}} = 55,56\,\mathrm{mol} \tag{15}$$

Dies entspricht dann N Teilchen:

$$N = n \cdot N_A = 3,33 \cdot 10^{25} \tag{16}$$

Da ein Wasserteilchen ($\mathrm{H_2O}$) 10 Elektronen hat, sind es dann $10 \cdot 3,33 \cdot 10^{25} = 3,33 \cdot 10^{26}$ Elektronen pro Liter Wasser.
$\Rightarrow$ **Antwort A** “$3,3 \cdot 10^{26}$ g” ist somit korrekt.

Beispielaufgabe 3: SS 2005N #14

Die Zeit, bis sich die Zahl der Erkrankten verhundertfacht hat, lässt sich berechnen mit der Formel

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}. \tag{17}$$

Man setzt $N(t) = 100$ und $N_0 = 1$ ein und löst nach t auf. Leider fehlt dafür noch die Größe λ, die sich aber leicht zuvor berechnen lässt aus der Halbwertszeit $T_1/2$:

$$\lambda = \frac{ln\,2}{T_{1/2}} = \frac{0,693}{24\,\mathrm{h}} = 0,028\,\frac{1}{\mathrm{h}}. \tag{18}$$

Also setzen wir alles ein:

$$100 = 1 \cdot e^{-0,028\,\frac{1}{\mathrm{h}}\,t} \qquad \Leftrightarrow \qquad 99 = e^{-0,028\,\frac{1}{\mathrm{h}}\,t} \tag{19}$$

$$\ln 99 = -0,028\,\frac{1}{\mathrm{h}}\,t \qquad \Leftrightarrow \qquad t = 164,1\,\mathrm{h} = 6,83\,\mathrm{d} \tag{20}$$

$\Rightarrow$ **Antwort B** "In etwa einer Woche." ist somit korrekt.