Statistical Methods in Data analysis WS 2017/18

Prof. Dr. Ulrich Landgraf

Lösungen zur den Übungen 6 vom 07.12.2017

Aufgabe 1 (Beachten Sie auch den zugehörigen ROOT code!)

a) Wir schreiben die Transformationsgleichungen zu Polarkoordinaten auf:

$$x = r\cos\phi \qquad \text{und} \qquad y = r\sin\phi$$

Da die Zufallsvariablen x und y nicht korreliert sind, erhalten wir

$$f(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y) \quad \text{mit} \quad f_1 = f_2 = 0.5$$

für $-1 \leq x \leq 1$ beziehungsweise $-1 \leq y \leq 1$. Daher gilt:

$$g(r,\phi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{vmatrix} \cdot 0.5 \cdot 0.5$$

Die Ableitungen sind

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\phi \qquad \frac{\partial x}{\partial \phi} = -r\sin\phi$$
$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\phi \qquad \frac{\partial y}{\partial \phi} = r\cos\phi$$

Die Determinante ergibt sich als

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial r}\cdot\frac{\partial y}{\partial \phi} - \frac{\partial x}{\partial \phi}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\phi\cdot r\cos\phi + r\sin\phi\cdot\sin\phi = r(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = r$$

Daher ist die resultierende Verteilung, gültig für $-1 \leq x \leq 1$ **und** $-1 \leq y \leq 1$

$$g(r,\phi) = \frac{1}{4}\cdot r$$

Sie ist unabhängig von ϕ, d.h. in dieser Variable ist sie gleichverteilt. Wenn der Radius r größer als 1 ist, tragen nicht alle ϕ-Werte sondern nur die “Ecken” zu den entsprechenden r-Bins bei; daher weicht hier die Verteilung von dem linearen Anstieg mit r ab.

$R_{max} = \sqrt{2} = 1.414$, da der größte Radius in den Ecken des Quadrats erreicht wird.

b) Die Rechnung folgt eng derjenigen in Abschnitt a), aber hier lauten die Transformationsformeln

$$x = \sqrt{s}\,\cos\phi \qquad \text{und} \qquad y = \sqrt{s}\,\sin\phi$$

und die Ableitungen

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{1}{2\sqrt{s}}\cos\phi \qquad \frac{\partial x}{\partial \phi} = -\sqrt{s}\,\sin\phi$$
$$\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{1}{2\sqrt{s}}\sin\phi \qquad \frac{\partial y}{\partial \phi} = \sqrt{s}\,\cos\phi$$

Daher ergibt sich die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{s}} \cos\phi \cdot \sqrt{s} \cos\phi + \sqrt{s} \sin\phi \cdot \frac{1}{2\sqrt{s}} \sin\phi = \frac{1}{2}(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = \frac{1}{2}$$

und $g(s,\phi) = \frac{1}{8}$ ist gleichförmig in s und ϕ verteilt, wobei $-1 \leq x \leq 1$ **und** $-1 \leq y \leq 1$ gilt.

c) Die Einschränkung von $g(s)$ auf $s < 1$ macht eine neue Normierung erforderlich:

$$C \cdot \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 ds \, \frac{1}{8} \stackrel{!}{=} 1 \qquad \rightarrow \qquad C = \frac{4}{\pi} \qquad \rightarrow \qquad g(s,\phi) = \frac{1}{2\pi} \, .$$

Da wir die Variable ϕ ignorieren wollen, müssen wir über sie integrieren:

$$g(s) = \int_0^{2\pi} g(s,\phi) \, d\phi = 1 \, .$$

Wir berechnen zunächst die Umkehrtransformation:

$$w = \sqrt{-2\ln s} \quad \rightarrow \quad w^2 = -2\,\ln s \quad \rightarrow \quad \ln s = -\frac{w^2}{2} \quad \rightarrow \quad s = e^{-\frac{w^2}{2}}$$

Dann schreiben wir die Transformation der Wahrscheinlichkeitsdichte hin:

$$g(w) = \left|\frac{ds}{dw}\right| \cdot f(w) = \left|\frac{d}{ds}\left(e^{-\frac{w^2}{2}}\right)\right| \cdot \frac{1}{2\pi} = w \cdot e^{-\frac{w^2}{2}}$$

d) Wenn wir ϕ von den Zufallszahlen x und y berechenen, die wir in Teil b) gewürfelt hatten, gilt

$$\cos\phi = \frac{x}{\sqrt{s}} \qquad \text{und} \qquad \sin\phi = \frac{y}{\sqrt{s}} \, .$$

Wir bekommen daraus die Zufallszahlen u und v, indem wir w als Radius in der (u,v)-Ebene ansehen und w auf die Koordinatenachsen projizieren:

$$u = w\cos\phi = w \cdot \frac{x}{\sqrt{s}} \qquad \text{und} \qquad v = w\sin\phi = w \cdot \frac{y}{\sqrt{s}} \, .$$

Setzen wir jetzt w aus der Transformation in Teil c) ein:

$$u = \sqrt{-2\ln s} \cdot \frac{x}{\sqrt{s}} \qquad \rightarrow \qquad u = x\sqrt{\frac{-2\ln s}{s}}$$

$$v = \sqrt{-2\ln s} \cdot \frac{y}{\sqrt{s}} \qquad \rightarrow \qquad v = y\sqrt{\frac{-2\ln s}{s}}$$

Was die Normierung angeht: weil wir die Variable ϕ wieder einführen, müssen wir die w-Verteilungen durch 2π dividieren:

$$g(w,\phi) = \frac{1}{2\pi} \cdot g(w) \, .$$

Da w verteilt ist wie das Quadrat einer Gaussverteilung, müssen u und v mit dem Faktor $1/\sqrt{2\pi}$ normiert werden, wie wir es bereits in der Vorlesung berechnet hatten.