Statistische Methoden der Datenanalyse WS 2017/18

Prof. Dr. Ulrich Landgraf

Lösung zum Aufgabenblatt 2 vom 07.11.2017

Aufgabe 1 Siehe Programmcode

Aufgabe 2 Siehe Programmcode

Aufgabe 3 Siehe Programmcode

Aufgabe 4

Das Ereignis, dass sich der Gewinn hinter Tür i befindet, sei mit G_i bezeichnet. Wir nehmen an, dass sich der Kandidat anfangs für Tür 1 entschieden hat. Dann sind die Wahrscheinlichkeiten G_i alle gleich, d.h.

$$G_1 = G_2 = G_3 = \frac{1}{3}$$

Mit M_j bezeichnen wir das Ereignis, dass der Moderator die Tür j öffnet. Es interessieren hier nur die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(M_j|G_i)$. Nach den Regeln öffnet der Moderator nie die erste Tür und es ist $P(M_2|G_2) = P(M_3|G_3) = 0$. Ist der Gewinn hinter der ersten Tür, kann der Moderator jede von den anderen beiden öffnen, d.h. es ist $P(M_2|G_1) = P(M_3|G_1) = \frac{1}{2}$. Ist der Gewinn dagegen hinter Tür 2 oder Tür 3, so hat der Moderator keine Wahl: $P(M_2|G_3) = P(M_3|G_2) = 1$.

Nehmen wir an, dass der Moderator Tür 2 öffnet, so ist

$$\begin{aligned}
P(G_1|M_3) &= \frac{P(M_3|G_1)\cdot P(G_1)}{P(M_3|G_1)\cdot P(G_1) + P(M_3|G_2)\cdot P(G_2) + P(M_3|G_3)\cdot P(G_3)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3}} \\
&= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Hingegen ist

$$\begin{aligned}
P(G_2|M_3) &= \frac{P(M_3|G_2)\cdot P(G_2)}{P(M_3|G_1)\cdot P(G_1) + P(M_3|G_2)\cdot P(G_2) + P(M_3|G_3)\cdot P(G_3)} \\
&= \frac{1\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3}} \\
&= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Die Chance des Kandidaten ist also doppelt so groß, wenn er nun auf die Tür 2 tippt, als wenn er bei der ersten Wahl von Tür 1 bleibt. Ersetzen Sie in der Rechnung entsprechend M_3 durch M_2 und G_2 durch G_3, falls der Moderator die Tür M_2 öffnet; dann sollte der Kandidat eben die Tür 3 wählen.