Statistische Methoden der Datenanalyse WS 2017/18

Prof. Dr. Ulrich Landgraf

Aufgabenblatt 8 vom 10.01.2018

Aufgabe 1 (Parameterschätzung von Obertönen) (5 Punkte)

Es soll die Klangfarbe einer offenen Orgelpfeife durch die Amplituden des Grundtones und der ersten zwei Obertöne bestimmt werden. Die Pfeife ist auf den Kammerton (440 Hz) gestimmt. Sie haben dazu den Ton mit einer Abtastrate von 10 kHz während einer Zeit von 5 Millisekunden aufgenommen, d.h. Sie haben alle 0.1 msec die Amplitude der Schwingung gemessen.

Die Daten dieser Aufnahe finden Sie in der Datei `http://hep.uni-freiburg.de/tl_files/home/wwwherten/statistik/Aufg8.data`. In der ersten Spalte jeder Zeile steht die relative Aufnahmezeit in Sekunden, in der zweiten Spalte die Amplitude. Da Ihre Aufnahme ein wenig verrauscht ist, schwanken die Amplituden mit einer gaussförmigen Verteilung mit einer Standardabweichung von 0.1 Einheiten um die wahren Werte.

(a) Lesen Sie die Daten ein und stellen Sie sie grafisch mit der Klasse TGraph dar. Zum Einlesen erzeugen Sie eine Instanz der Klasse `ifstream` (z.B. mit dem Namen `file`), die einen Input-Datenstrom aus einer Datei zur Verfügung stellt. Benutzen Sie die Methode `file.open` zum Öffnen der Datei und die Methode `>>`, um die Daten in die Variablen zu schieben, also z.B. `file >> x >> y`. Mit der Methode `file.good()` können Sie testen, ob noch weitere Daten vorhanden sind; wenn keine Daten mehr gelesen werden können gibt sie den Wert 0 zurück, sonst den Wert 1.

(b) Nun sollen Sie die Amplituden der Obertöne mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate bestimmen. Die erste Oberschwingung einer offenen Pfeife besitzt die dreifache Frequenz des Grundtones, die zweite die fünffache Frequenz. Ihre „theoretische Vorhersage“ für die Daten ist also:

$$f(t) = \Theta_0 \cdot \sin(2\pi \cdot f_0 \cdot t) + \Theta_1 \cdot \sin(2\pi \cdot f_1 \cdot t) \ + \Theta_2 \cdot \sin(2\pi \cdot f_2 \cdot t) \ ,$$

wobei Θ_0, Θ_1 und Θ_2 die zu bestimmenden Amplituden sind.

Benutzen Sie die ROOT-Klassen `TMatrixD` und `TVectorD`, um die Matrixoperationen auszuführen. Erstellen Sie sich zunächst die Kovarianzmatriv $\underline{V}$ und die Koeffizientenmatrix $\underline{A}$, indem Sie die Elemente mit $V[i][j]$ setzen, wobei $[i]$ der Zeilenindex und $[j]$ der Spaltenindex ist. Die Rechenoperationen mit Matritzen sind dann einfach mit den Rechenzeichen `*,+,-` definiert. Vorsicht ist allerdings bei den Operationen „Transpose“ und „Invert“ geboten: diese Operationen überschreiben die ursprüngliche Matrix, d.h. nach `A.Invert()` enthält die Matrix `A` das Inverse der ursprünglichne Matrix! Wenn man den Inhalt von `A` erhalten will, definiert man besser mit `TMatrixD A_T(TMatrixD::kTransposed,A)` aus $\underline{A}$ eine neue Matrix $\underline{A\_T}$ und zwar mit einem Kopierkonstruktor, welcher zusätzlich eben noch eine Operation wie `kTransposed` oder `kInverted` ausführen kann. Kontrollieren Sie zwischendurch den Inhalt der Matritzen durch die nützliche Methode `A.Print()`!

Bitte wenden!

Sie können mit diesen Kenntnissen dann einfach die in der Vorlesung erarbeiteten Matrixoperationen durchführen. Bitte geben Sie am Ende der Rechnung die Amplitudenparameter und deren Kovarianzmatrix an. Gibt es Korrelationen? Was sind die Standardabweichungen der bestimmen Parameter?

(c) Als letzte Aufgabe zeichnen Sie bitte die von Ihnen bestimmte Funktion mit der Option `SAME` in das Diagramm der Aufgabe (a) ein. Hier empfielt es sich, bei der Klasse `TF1` die Methode `SetParameter` zu verwenden, um die gefundenen Werte direkt in die Grafik einfließen zu lassen.