Statistische Methoden der Datenanalyse WS 2017/18

Prof. Dr. Ulrich Landgraf

Aufgabenblatt 6 vom 06.12.2017

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Wir beginnen mit einem Quadrat, in dem x gleichverteilt zwischen $x = -1$ und $x = +1$ und y ebenfalls gleichverteilt zwischen $y = -1$ und $y = +1$ variiert.

a) Transformieren Sie diese Verteilung von Zufallszahlen in Polarkoordinaten (r, ϕ) und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $g(r, \phi)$ in den neuen Koordinaten. Erzeugen Sie Histogramme für die eindimensionalen Projektionen, d.h.

$$\int_0^{R_{max}} g(r, \phi)\, dr \qquad \text{and} \qquad \int_0^{2\pi} g(r, \phi)\, d\phi$$

Wie groß ist R_{max}? Können Sie diese Projektionen interpretieren?

b) Verwenden Sie jetzt $s = r^2$ anstelle von r, das heisst benutzen Sie (s, ϕ) als Koordinaten. Berechnen Sie wieder die entstehende Wahrscheinlichkeitsdichte in den neuen Koordinaten und füllen Sie diese und die Projektionen auf die s-Achse und die ϕ-Achse in Histogramme.

c) Jetzt werden wir ϕ für eine Weile nicht betrachten und uns außerdem auf Werte $s < 1$ beschränken, um von einer einfachen Verteilung auszugehen. Dann wenden wir auf s die folgende Koordinatentransformation an:

$$w = \sqrt{-2 \ln s}$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte für w? Bestätigen Sie Ihre Rechnung, indem Sie die berechnete Kurve mit einem Zufallshistogramm vergleichen!

d) Als wir das Normierungsintegral für die Gaußkurve berechneten, benutzten wir den Trick, das Integral zu quadrieren und dann zu Polarkoordinaten überzugehen. Während die resultierende Funktion nicht von ϕ abhing (wegen der Invarianz bei Rotationen um die z-Achse), hatte sie eine r-Abhängigkeit gemäß

$$r \cdot e^{-\frac{r^2}{2}} .$$

Es stellt sich heraus, dass unser w genau derselben Verteilung gehorcht. Das heißt, wir können zwei Zufallsvariablen erhalten, die gaußverteilt sind, wenn wir die Variable w auf zwei orthogonale Achsen projizieren. Wenn wir deren Koordinaten u und v nennen, dann gilt $u = w \cos \phi$ und $v = w \sin \phi$.

Bitte wenden!

Damit wir keine neuen Zufallszahlen erzeugen müssen, können wir die Zufallszahlen für ϕ verwenden, die wir während der Transformation in Teilaufgabe b) erhalten haben.

Jetzt können Sie die vollständige Transformationsformeln niederschreiben, die von (x, y) zu (u, v) führen. Beachten Sie, dass wir sie nicht auf dem direkten Weg hätten ableiten können, da dabei transzendente Gleichungen aufgetreten wären, die wir nicht analytisch hätten lösen können.

Erzeugen Sie zwei Histogramme mit den Verteilungen für u und w.

Bemerkung: Wir haben in diesem Übungsblatt gelernt, wie man zwei unabhängige Zufallszahlen erzeugen kann, die einer Gauß'schen Verteilung gehorchen. Durch eine Kombination und Skalieren der Zufallszahlen kann man auch korrelierte Zufallszahlen erzeugen. `Gauss2D` benutzte die Formeln, die in

`http://en.wikipedia.org/wiki/Multivariate_normal_distribution#Density_function`, "Bivariate case",

oder

`http://de.wikipedia.org/wiki/Mehrdimensionale _Normalverteilung #Dichte_der_zweidimensionalen_Normalverteilung`

erklärt werden, um diese Zufallszahlen zu erzeugen.

Wenn Sie mehr über diese Methode wissen wollen können Sie sich die Webseite anschauen. Sie finden dort eine (sehr kurze) Erklärung der Methode.