Statistische Methoden der Datenanalyse WS 2017/18

Prof. Dr. Ulrich Landgraf

Aufgabenblatt 4 vom 22.11.2017

Aufgabe 1 (2 Punkte)

An einer Universität wurde die Körpergröße der Studentinnen und der männlichen Studenten untersucht. Es wurde hierbei festgestellt, dass sie bei beiden Geschlechtern normalverteilt ist, wobei sich für die Studentinnen ein Erwartungswert von 164 cm mit einer Standardabweichung von 8 cm und für die männlichen Studenten ein Erwartungswert von 180 cm mit einer Standardabweichung von 10 cm ergab. An einer Statistikprüfungsklausur nehmen 50 Studentinnen und 75 männliche Studenten teil. Berechnen Sie, was man im Mittel als Antwort auf die folgenden Fragen erwarten kann.

a) Wie viele von den Studierenden insgesamt, die an der Prüfung teilnehmen, haben eine Körperlänge zwischen 164 cm und 180 cm?

b) Welche Körperlänge wird von den 15 kleinsten, an der Prüfung teilnehmenden männlichen Studenten nicht überschritten?

c) Welche Körperlänge haben die 10 größten, an der Prüfung teilnehmenden Studentinnen mindestens?

Aufgabe 2 (2 Punkte) **Achtung:** Achten Sie auf die Maßeinheiten!

Bei der Produktion von Kochtöpfen hat sich bei einem Modell gezeigt, dass die Durchmesser einer Normalverteilung mit einem Mittelwert von 25 cm und einer Standardabweichung von $0,2$ mm folgen.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein Topf einen Durchmesser zwischen $24,97$ und $25,03$ cm?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein Topf einen Durchmesser, der kleiner als $25,01$ cm ist?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Abweichungen vom Solldurchmesser zwischen $0,03$ cm und $0,06$ cm liegen?

d) Wie groß ist der Durchmesser von 95 % aller Töpfe, wenn Sie alle Exemplare betrachten, die eine möglichst kleine Abweichung vom Sollwert (25 cm) haben?

Hinweis: Es gibt in ROOT eine Umkehrfunktion zu `TMath::Erf`, die `TMath::ErfInverse` heißt.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Stellen Sie durch Simulation in ROOT fest, welche Form die Wahrscheinlichkeitsdichte der Verteilung hat, die durch $z = x + y$ gebildet wird, wobei x und y jeweils unabhängige Zufallszahlen sind, die zwischen 0 und 1 gleichverteilt sind. Generieren Sie dabei soviele Einträge in das Histogramm, dass Sie die Schwankungen kaum noch sehen.

Beschreiben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte durch eine Formel für $f(z)$. Beachten Sie dabei, dass die Normierung stimmt ($\int f(z)\,dz = 1$). Rechnen Sie dann den Mittelwert und die Standardabweichung der neuen Verteilung aus. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Mittelwert und der Standardabweichung der Verteilung von x oder y.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zufallsgenerator für einen Teilchenzerfall:
In dieser Übung werden wir die Transformationsmethode anwenden, um Zufallszahlen x zu erzeugen, die gemäß der Exponentialverteilung

$$f(x;\tau) = \frac{1}{\tau}\, e^{-\frac{x}{\tau}}$$

verteilt sind. Die Variablen x könnten beispielsweise die Zerfallszeiten eines Teilchens mit Lebensdauer τ repräsentieren.

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Erzeugen Sie gleichverteilte Zufallszahlen zwischen 0 und 1, indem Sie den in ROOT implementierten Zufallsgenerator `TRandom3::Uniform(Double_t x1, Double_t x2)` benutzen.

(ii) Benutzen Sie die Transformationsmethode, um die gleichverteilten Zufallszahlen r in exponentiell verteilte Zufallszahlen umzuwandeln.
Hinweis: Mit der Transformationsformel erhalten Sie die Ableitung der Transformationsfunktion, die Sie noch einmal integrieren müssen, um auf die Transformationsfunktion selbst zu kommen. Beachten Sie auch, dass die Transformationsformel Ihnen nur den Betrag der Ableitung liefert, Sie also das Vorzeichen noch frei wählen können!

(iii) Füllen Sie die erzeugten Werte für x und r in Histogramme ein.