Statistische Methoden der Datenanalyse WS 2017/18

Prof. Dr. Ulrich Landgraf

Aufgabenblatt 3 vom 15.11.2017

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Bei einem Geschäft wird die Anzahl der Kunden X pro 10-Minuten-Intervall betrachtet. Aufgrund längerer Beobachtungen weiß man, dass die Poissonverteilung mit $\mu = 2$ ein geeignetes Verteilungsmodell für die Zahl der Kunden ist.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem 10-Minuten-Intervall
i) nicht mehr als zwei Kunden,
ii) mehr als zwei Kunden
iii) mindestens ein, aber höchstens vier Kunden das Geschäft betreten?

b) Wieviele Kunden kann man im Schnitt in einem 10-Minuten-Intervall erwarten?

c) geben Sie die Standardabweichung von X an

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Sie treffen einen alten Freund in einem Freiburger Biergarten. Ihr Freund schlägt vor, dass derjenige die Bierchen bezahlt, der aus einem Kartenstapel die geringer bewertete Karte zieht (die genauen Regeln sind unwichtig). Sie machen das Spielchen mit, ihr Freund gewinnt und Sie müssen zahlen. An den darauffolgenden Tagen setzen Sie das Spielchen fort und jedesmal müssen Sie die Zeche zahlen.

Langsam fangen sie an argwöhnisch zu werden und überlegen, ob alles mit rechten Dingen zugeht oder Ihr alter Freund sie reinlegt.

(i) Wie entwickelt sich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ihr Freund ein kleiner Betrüger ist mit der Anzahl der von Ihnen bezahlten Rechnungen (1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 20) ? Nehmen Sie dafür an, dass die Wahrscheinlichkeit für die Hypothese, dass Ihr Freund Sie übers Ohr haut, nur 5 % beträgt, da es ja ein alter Freund von Ihnen ist (aber man weiß ja nie). Falls er Sie betrügt, so gehen wir davon aus, dass er es an jedem Abend macht. Falls Ihr Pech aber lediglich vom Zufall abhängt, nehmen wir natürlicherweise an, dass die Wahrscheinlichkeit, dass Sie die allabendliche Rechnung bezahlen müssen, 50 % ist.

(ii) Stellen Sie die gleichen Überlegungen für den Fall an, dass Sie ihm mit 1 % bzw. 50 % zutrauen, Sie zu hintergehen! Was beobachten Sie?

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Verwenden Sie die ROOT-Klasse TF1, um die Funktion $y = 2x - x^2$ im Intervall $[0, 2]$ grafisch darzustellen. Richten Sie bitte mit den Methoden `SetMinimum` und `SetMaximum` das Koordinatensystem so ein, dass die Grafik nur den Wertebereich $[0, 1]$ anzeigt.

Wir wollen nun eine Methode kennenlernen, um ohne Berechnung von Integralen die Fläche unter dieser Kurve A zu bestimmen. Wenn Sie die in Ihrer Grafik dargestellte Fläche gleichmäßig mit zufälligen Punkten belegen, wird der Anteil der Punkte innerhalb der Fläche

A unter der Kurve $N_{\text{innen}}/N_{\text{gesamt}}$ gerade dem Verhältnis der gesuchten Fläche zur Gesamtfläche des Rechtecks entsprechen, dass durch die Koordinatenachsen aufgespannt wird:

$$\frac{N_{\text{innen}}}{N_{\text{gesamt}}} = \frac{A}{(y_{\text{max}} - y_{\text{min}}) \cdot (x_{\text{max}} - x_{\text{min}})}$$

Damit haben Sie eine einfache Methode gefunden, die Fläche A zu berechnen:

$$A = \frac{N_{\text{innen}}}{N_{\text{gesamt}}} \cdot (y_{\text{max}} - y_{\text{min}}) \cdot (x_{\text{max}} - x_{\text{min}})$$

Wenden Sie dieses "Monte-Carlo-Methode" genannte Verfahren an, um das Integral

$$\int_0^2 (2x - x^2)\, dx$$

zu berechnen. Variieren Sie dabei die Anzahl der Zufallspunkte und probieren Sie aus, wieviel Punkte sie etwa brauchen, damit das "richtige" Ergebnis (das Sie durch Rechnung erhalten) auf 0,1% genau herauskommt.